MENENTUKAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI CHOLESKY

Herlina[10],
[10]Universitas Al Aysriyah Mandar, Polewali
Email: herlina@gmail.com

(***Received***: 11-5-2018; ***Reviewed:*** 17-05-2018; ***Revised:*** 16-06-2018; ***Accepted:*** 17-06-2018; ***Published:*** 3-02-2019)

©2019 –Aksiomatik: Jurnal ilmiah matematika dan pembelajarannya adalah Jurnal yang diterbitkan oleh STKIP YPUP Makassar. Ini adalah artikel dengan akses terbuka dibawah licenci CC BY-NC-4.0 (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

ABSTRAK

Tujuan dari penulisan ini adalah: untuk mengetahui cara atau prosedur dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan metode dekomposisi Cholesky. Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur. Dimana penulis mengumpulkan beberapa buku penunjang yaitu: matriks, aljabar linear dan literatur pendukung lainnya. Dengan cara membaca dan memahami materi yang berkaitan dengan pokok bahasan, kemudian dari buku-buku tersebut digabungkan beberapa teori yang terkait dari satu mata kuliah ke mata kuliah lainnya serta memberikan contoh sistem persamaan linear pada matriks simetris dan menguraikan langkah-langkah penyelesaiannya dengan menggunakan perhitungan metode dekomposisi Cholesky.Langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan linier menggunakan metode dekomposisi Cholesky yaitu: 1) Menyajikan suatu sistem persamaan linier 3×3; 2) Mengubah sistem persamaan linier dalam bentuk matriks, yaitu: $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$; 3) Membentuk persamaan $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ kedalam metode dekomposisi Cholesky $\mathbf{A} = \mathbf{LL^T}$; 4) Mensubstitusi persamaan $\mathbf{A} = \mathbf{LL^T}$ kedalam persamaan $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ sehingga diperoleh $\mathbf{LL^TX} = \mathbf{B}$; 5) Mengubah persamaan $\mathbf{LL^TX} = \mathbf{B}$ kedalam bentuk $\mathbf{LZ} = \mathbf{B}$; 6) Menggunakan substitusi maju untuk menghitung vector **Z** dengan operasi matriks $\mathbf{LZ} = \mathbf{B}$; 7) Mendefinisikan vector baru **Z** yang berukuran $n \times 1$ dengan $\mathbf{L^TX} = \mathbf{Z}$; 8) Menggunakan substitusi mundur untuk menghitung vector **X** dengan operasi matriks $\mathbf{L^TX} = \mathbf{Z}$, sehingga diperoleh solusinya.

Kata Kunci: Sistem Persamaan Linear, Matriks Simetris, Matriks Transpose, Matriks Segitiga, Dekomposisi Matriks, Metode Dekomposisi Cholesky.

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak akan pernah lepas dari berbagai permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut dari berbagai aspek, yang dalam penyelesaiannya diperlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu, salah satunya ilmu matematika. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang sangat penting untuk dipahami, karena sangat dibutuhkan diberbagai bidang kehidupan, karena ketepatannya dalam pencarian solusi.

Tidak semua persamaan matematis dapat diselesaikan dengan mudah. Bahkan dalam prinsip matematik, dalam memandang persamaan yang terlebih dahulu diperhatikan apakah persamaan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak. Hal ini menjelaskan bahwa tidak semua persamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan eksak, Oleh karena itu diperlukan metode-metode pendekatan untuk dapat memperoleh hasil yang dapat dikatakan mendekati benar. Metode tersebut adalah metode numerik, yaitu teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang sangat banyak dan berulang-ulang. Persamaan-persamaan yang diselesaikan dengan metode numerik adalah persamaan matematis yang penyelesaiannya sulit atau didapatkan dengan menggunakan metode analitik. Persamaan linear merupakan persamaan yang dapat diselesaikan dengan metode numerik.

Matriks adalah suatu kumpulan angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris. Aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika sendiri maupun bagi disiplin ilmu yang lain. Matriks banyak sekali kegunaannya dalam memecahkan banyak persoalan dan memudahkan di dalam pembuatan analisis-analisis yang mencakup hubungan antara variabel-variabel, salah satunya untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Dengan menggunakan persamaan matriks, suatu bentuk sistem persamaan linear akan lebih mudah dalam mencari pemecahannya.

Salah satu persamaan yang sangat penting dalam Matematika adalah persamaan linear, yaitu suatu persamaan yang variabel-variabelnya berpangkat satu dan tidak mengandung perkalian antara satu variabel dengan variabel lainnya *(Sutojo.T , 2010)*.

Salah satu permasalahan pada bidang aljabar linear adalah menyelesaikan sistem persamaan linear AX = B, untuk suatu matriks A serta vektor X dan B. Untuk memecahkan sistem persamaan linear AX = B, ada beberapa metode yang bisa digunakan, diantaranya: Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Eliminasi Gauss-Seidel, dan aturan Cramer. Namun selain cara tersebut, dapat pula dikerjakan dengan cara memfaktorkan matriks A dalam bentuk $A = LL^T$. Dengan demikian persamaan linear akan berubah bentuk menjadi $AX = LL^TX = B$. Sehingga cara yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut adalah dengan menghitung vektor $Z = L^TX$ dan diharapkan persamaan linear akan lebih mudah diselesaikan dalam bentuk LZ = B. Tehnik pemfaktoran tersebut dinamakan metode *Cholesky (Kartono, 2002)*.

Metode *Cholesky* adalah salah satu metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah sistem persamaan linear. Pada dasarnya metode ini hanya bentuk khusus dari metode faktorisasi Doolittle. Namun sering kali suatu model permasalahan menjadi rumit dan tidak dapat diselesaikan dengan metode penyelesaian biasa. Oleh karena

itu, digunakanlah metode lain yaitu metode numerik jenis dekomposisi *Cholesky (Anonim, 2012)*.

Kelebihan dari metode dekomposisi *Cholesky* yaitu dalam proses penyelesaiannya lebih singkat dan mudah dipahami dibandingkan dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan yang dalam proses langkah eliminasi yang memakan waktu lama dan kemungkinan besar terjadi kesalahan dalam proses perhitungannya sehingga metode dekomposisi *Cholesky* sangat efesien untuk memecahkan sistem persamaan linear.

Seperti penjelasan sebelumnya bahwa persamaan linear dapat diselesaikan dengan dekomposisi matriks maka yang menjadi pertanyaan penulis disini adalah bagaimana persamaan linier dapat diselesaikan dengan metode *Cholesky*? Hal inilah yang menjadi pendorong bagi penulis untuk mengambil judul penelitian " Menentukan Solusi Sistem Persamaan Linear dengan Menggunakan Metode Dekomposisi *Cholesky*".Secara umum dirumuskan masalah yang akan dibahas dalam tulisan ini, yaitu:

1. Bagaimana kajian matematis metode dekomposisi *Cholesky* dari suatu sistem persamaan linear ?
2. Bagaimana aplikasi metode dekomposisi *Cholesky* dalam menentukan solusi sistem persamaan linear ?

Adapun tujuan penelitian ini yaitu:

1. Menunjukkan kajian matematis metode dekomposisi *Cholesky* dari suatu sistem persamaan linear.
2. Menunjukkan aplikasi metode dekomposisi *Cholesky* dalam menentukan solusi sistem persamaan linear.

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

Dapat dijadikan bahan referensi untuk kajian sistem persamaan linear khususnya yang berkaitan dengan metode dekomposisi *Cholesky.*

Menambah wawasan serta meningkatkan pengetahuan tentang matematika khususnya mengenai materi aljabar.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah menggunakan penelitian dasar/murni. Penelitian dasar atau murni dalam istilah asing sering juga disebut sebagai *basic research, fundamental research,* atau *pure research,* yaitu penelitian yang bertujuan untuk memperluas/memperdalam teori atau untuk memperoleh data empiris yang digunakan untuk memformulasi teori. Dengan kata lain, konsep yang dipelajari tersebut bertujuan untuk mencari solusi sistem persamaan linear dengan menggunakan metode Dekomposisi *Cholesky*. Waktu yang direncanakan selama 4 bulan yang dimulai dari bulan maret – juni dan lokasi penelitian dilakukan di Perpustakaan Jurusan Matematika FMIPA UNM.

HASIL PENELITIAN

Metode dekomposisi *Cholesky* yang dikaji dalam penelitian ini hanya berlaku pada matriks yang unsur koefisien variabel yang simetris dan tidak berlaku pada matriks yang tidak simetris karena pada saat proses mendekomposisi matriks **A** menjadi $\mathbf{A} = \mathbf{LL^T}$, hasil kali dari elemen-elemen tersebut tidak sama dengan matriks awalnya sehingga metode dekomposisi *Cholesky* tidak memenuhi untuk matriks yang tidak simetris. Pada dasarnya tujuan dari metode dekomposisi *Cholesky* yaitu menyelesaikan sistem persamaan linear. Sebagai metode dekomposisi , proses dekomposisi $\mathbf{A} = \mathbf{LL^T}$ mempunyai target membentuk matriks segitiga bawah dengan diagonal utama pada matriks **A** bernilai positif .

Dengan menggunakan 2 contoh sistem persamaan linear, contoh 1 dan 2 mewakili sistem persamaan linear yang koefisien variabelnya simetris diselesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi *cholesky* dan metode Eliminasi Gauss-Jordan. Pada metode dekomposisi *Cholesky* untuk menentukan solusi sistem persamaan linear dapat dilakukan dengn 2 cara yaitu untuk mencari matriks segitiga bawah dapat dilakukan dengan mendekomposisi matriks **A** menjadi $\mathbf{A} = \mathbf{LL^T}$, sedangkan untuk mencari matriks segitiga atas dapat dilakukan dengan mendekomposisi matriks **A** menjadi $\mathbf{A} = \mathbf{U^T U}$. Meskipun dalam proses dekomposisi berbeda namun solusi yang diperoleh dari kedua cara tersebut bernilai sama.

Dalam menentukan solusi sistem persamaan linear metode dekomposisi *Cholesky* dalam proses penyelesaiannya lebih singkat dan mudah dipahami dibandingkan dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan yang dalam proses langkah eliminasi yang memakan waktu lama dan kemungkinan besar sering terjadi kesalahan dalam proses perhitungannya sehingga metode dekomposisi *Cholesky* sangat efesien untuk memecahkan sistem persamaan linear.

SIMPULAN DAN SARAN

SIMPULAN

1. Proses mengubah matriks **A** menjadi matriks segitiga bawah dalam mencari dekomposisi matriks $\mathbf{A} = \mathbf{LL^T}$ adalah dengan cara langsung dalam hal ini berarti bahwa elemen-elemen matriks yang dicari dapat dihitung dari elemen-elemen matriks yang diketahui sebelumnya.
2. Dalam menentukan solusi sistem persamaan linear metode dekomposisi *Cholesky* dalam proses penyelesaiannya lebih singkat dan mudah dipahami dibandingkan dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan yang dalam proses langkah eliminasi yang memakan waktu lama dan kemungkinan besar terjadi kesalahan dalam proses perhitungannya sehingga metode dekomposisi *Cholesky* sangat efesien untuk memecahkan sistem persamaan linear.
3. Untuk mencari solusi dari sistem persamaan linear didapatkan dengan melakukan subtitusi maju *(forward subtitution)* yang mempunyai rumus umum:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}} \quad \forall\ k = 1, \dots, n-1, n$$

Dan subtitusi mundur *(back subtitution)* yang mempunyai rumus umum:

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}} \qquad \forall\, k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

4. Metode Dekomposisi *Cholesky* hanya dapat dilakukan pada sistem persamaan linear yang unsur koefisien variabelnya simetris.

Saran

Berdasarkan temuan penelitian dan analisis maka saran untuk penelitian selanjutnya yaitu:

1. Bagi Pembaca diharapkan dapat mengembangkan metode Dekomposisi *Cholesky* yang lebih mendalam.
2. Mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah metode numerik dan aljabar diharapkan dapat menggunakan hasil penelitian ini untuk dijadikan salah satu bahan rujukan dalam mempelajari metode numerik dan aljabar terutama yang berkaitan dengan sistem persamaan linear.
3. Bagi ahli matematika atau peneliti, diharapkan dapat melakukan penelitian lebih lanjut mengenai sistem persamaan linear berukuran besar yang tidak mempunyai dekomposisi *Cholesky*.
4. Bagi pembaca yang ingin mengkaji lebih lanjut mengenai aplikasi metode dekomposisi *Cholesky* dalam kehidupan nyata, diharapkan dapat menemukan contoh kasus yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR PUSTAKA

Anonim, *http://www.chemeng.ui.ac.id/~bismo/S2/mtks2/modul-2.pdf,Modul Sistem Persamaan Aljabar Linear*. Diakses pada tanggal 3 Januari 2012

Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linear Elementer.* Jakarta: Erlangga.

Ayres, Frank. 1985. *Seri Buku Schaum, Matriks*. Jakarta: Erlangga.

Chapra, C.Steven. Canale, P.Raymond. 1988. *Metode Numerik, Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga

Chapra, C.Steven. Canale, P.Raymond. 2006. *Numerical Method for Engineers, Fifth Edition.* New York: The Mc Graw Hill.

Hadley, G. 1992. *Aljabar Linear.* Terjemahan oleh Naipospos dan Noeniek Soemartoyo. Jakarta : Erlangga.

Kartono. 2002. *Aljabar Linear, Vektor, dan Eksplorasinya dengan Maple.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Leon.J.Steven. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.

Margha, M. 1980. *Matriks dan Perencanaan Linear*. Bandung : Armico.

Mathew, H.John. Fink, D.Kurtis. 2004. *Numerical Method Using Matlab, Fourth Edition.* USA: Pearson Prentice Hall.

Santosa, Gunawan. 2009. *Aljabar Linear Dasar*. Yogyakarta: ANDI Offset.

Supranto, J. 1981. Pengantar Matriks. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Sutojo, T.dkk. 2010. *Aljabar Linear dan Matriks (Dengan Implementasi Aljabar Linear Dan Matriks Menggunakan Matlab).* Semarang: Andi Yogyakarta.